BOSWELL-BÈTA

James Boswell Examen
VWO Wiskunde A – Voorbeeldexamen 2
Correctiemodel

Datum:	10 december 2020
Tijd:	13.00 – 16.00 (3 uur)
Aantal vragen:	6
Aantal subvragen:	24
Aantal bijlagen:	1
Totaal aantal punten:	72

Vakspecifieke regels voor de beoordeling

1. Voor elke rekenfout wordt 1 scorepunt in mindering gebracht tot het maximum van het aantal scorepunten dat voor dat deel van die vraag kan worden gegeven.
2. Indien in een antwoord een gevraagde verklaring, uitleg, afleiding of berekening ontbreekt dan wel foutief is, worden 0 scorepunten toegekend tenzij in het beoordelingsmodel anders is aangegeven. Dit geldt ook bij vragen waarbij de kandidaten de grafische rekenmachine (GR) gebruiken. Bij de betreffende vragen geven de kandidaten een toelichting waaruit blijkt hoe zij de GR hebben gebruikt (die in ieder geval bestaat uit vermelding van de ingevoerde formule(s) (of lijst(en)), de gebruikte optie(s) en het resultaat).
3. Als de kandidaat bij de beantwoording van een vraag een notatiefout heeft gemaakt en als gezien kan worden dat dit verder geen invloed op het eindantwoord heeft, dan wordt hiervoor *geen* scorepunt in mindering gebracht. Bij gebrek aan deze zichtbaarheid zal wél puntenaftrek moeten volgen.
4. Een fout in de uitwerking van een vraag wordt maar één keer aangerekend, tenzij daardoor de vraag aanzienlijk vereenvoudigd wordt en/of tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.
5. Een zelfde fout in de beantwoording van verschillende vragen moet steeds opnieuw worden aangerekend, tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.
6. Indien slechts één voorbeeld, reden, uitwerking of andersoortig antwoord wordt gevraagd, wordt uitsluitend het eerst gegeven antwoord beoordeeld; indien meer dan één voorbeeld, reden, uitwerking of andersoortig antwoord gevraagd wordt, worden uitsluitend de eerst gegeven antwoorden beoordeeld, tot maximaal het gevraagde aantal.
7. Als de kandidaat bij het eindantwoord geen eenheid heeft gegeven en deze wel bij het antwoord hoort, dan wordt 1 scorepunt in mindering gebracht, tenzij de eenheid al in de vraag vermeld is.
8. Als bij een vraag doorgerekend wordt met afgeronde tussenantwoorden en dit leidt tot een ander eindantwoord dan wanneer doorgerekend is met niet-afgeronde tussenantwoorden, dan wordt bij de betreffende vraag 1 scorepunt in mindering gebracht. Tussenantwoorden mogen wel afgerond *genoteerd* worden.
Uitzondering hierop zijn die gevallen waarin door de context wordt bepaald dat tussenantwoorden moeten worden afgerond.
De aftrek voor hierboven genoemde afrondfouten en/of fouten bij het afronden van het eindantwoord bedraagt voor het hele examen <u>maximaal 2 scorepunten</u>.

Toelichting bij vakregel **8.**
Het gedwongen afronden van tussenantwoorden kan onder andere (maar niet uitsluitend) in de volgende situaties voorkomen:

- het geldbedrag van een afzonderlijk product moet worden afgerond op twee decimalen;
- het aantal personen, dingen, etc. In een concrete situatie (dus bijvoorbeeld niet een gemiddelde of een verwachtingswaarde) moet worden afgerond op helen.

Het gedwongen hanteren van een minimale nauwkeurigheid van het antwoord kan onder andere (maar niet uitsluitend) in de volgende situaties voorkomen:

- het antwoord wijkt bij een beperkte nauwkeurigheid niet af van een triviale uitkomst. Dit kan bijvoorbeeld het geval zijn bij het afronden van een groeifactor of een kans naar 0 of 1. Een kans van $\left(\frac{1}{6}\right)^5$ mag bijvoorbeeld worden afgerond tot $0{,}0001$, maar niet tot $0{,}000$.

Het gedwongen naar boven of naar beneden afronden van antwoorden (al dan niet tegen de afrondregels in) kan onder andere (maar niet uitsluitend) in de volgende situaties voorkomen:

- uit de formulering van de vraag volgt dat een minimale of maximale hoeveelheid is gevraagd (bijvoorbeeld: ‘Hoe ver moet een atlete *ten minste* springen om een bepaald aantal punten te halen?’)

Opgave 1: Eieren

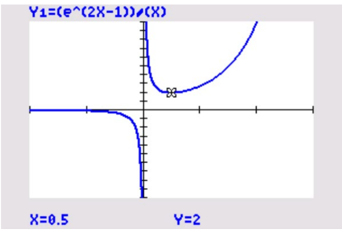
a	Het aantal bedrijfscodes is $9 \cdot 10^4$	1
	Het aantal eicodes is $4 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 10^4 \cdot 100$	1
	Het antwoord: 900 000 000 eicodes	1
b	*Manier 1:*	
	In 2017 bedroeg de export $\frac{409 \text{ mln}}{1{,}136} = 360{,}0 \ldots \text{mln euro}$	1
	De export is dus met $409 - 360{,}0 \ldots \approx 49$ (miljoen euro) toegenomen	1
	Manier 2:	
	$409 \text{ mln} \cdot \frac{13{,}6}{113{,}6}$ $(= 48{,}9 \ldots \text{mln})$	1
	De export is dus met ongeveer 49 (miljoen euro) toegenomen	1
c	$v = \frac{216-198}{6} = 3$	1
	Directe formule: $N_t = 3t + 198$	1
	Recursieve formule: $N_t = N_{t-1} + 3$ met $N_0 = 198$	1
d	*Manier 1:*	
	Inzicht dat de vergelijking $3t + 198 = 250$ moet worden opgelost	1
	$3t = 52$ geeft $t = 17\frac{1}{3}$	1
	Dus in het jaar $(2013 + 18 =)$ 2031	1
	Manier 2:	
	Beschrijven hoe de (recursieve of directe) formule van N kan worden ingevoerd in de rekenmachine	1
	De tabel geeft: <table><tr><td>t</td><td>N_t</td></tr><tr><td>17</td><td>249</td></tr><tr><td>18</td><td>252</td></tr></table>	1
	Dus in het jaar $(2013 + 18 =)$ 2031	1

Opgave 2: Koeien

a	$\text{P(gezond en positief)} = \text{P(gezond)} \cdot \text{P(positief als gezond)} = \frac{3}{4} \cdot 0{,}02$	1
	Het antwoord: 0,015	1
b	Inzicht dat: $\text{P(positief)} = \text{P(gezond en positief)} + \text{P(ziek en positief)}$	1
	$\text{P(ziek en positief)} = \text{P(ziek)} \cdot \text{P(positief als ziek)} = \frac{1}{4} \cdot 0{,}85\ (= 0{,}2125)$	1
	$\text{P(positief)} = 0{,}015 + 0{,}2125 = 0{,}2275$	1
c	Inzicht dat X binomiaal verdeeld is met $n = 20$ en $p = 0{,}2275$	1
	$\text{P}(2 < X \leq 8) = \text{P}(X \leq 8) - \text{P}(X \leq 2)$ $= binomcdf(20, 0.2275, 8) - binomcdf(20, 0.2275, 2)$ Als een kandidaat een grafische rekenmachine gebruikt waarmee hij $\text{P}(3 \leq X \leq 8)$ direct uitrekent, alle punten toekennen (mits correct uitgevoerd)	2
	Het antwoord: 0,843	1
d	μ = gemiddelde hoeveelheid voer die een zieke koe per dag eet (in kg) Als een kandidaat niet expliciet opschrijft wat μ voorstelt, geen punten aftrekken	
	$H_0: \mu = 70{,}0$	1
	$H_a: \mu < 70{,}0$	1
e	$\overline{Y}$ = gemiddelde hoeveelheid voer die de dertig koeien per dag eten (in kg)	
	Inzicht dat áls H_0 waar zou zijn, geldt dat $\overline{Y}$ normaal verdeeld is met $\mu = 70{,}0$ en $\sigma = \frac{12{,}5}{\sqrt{30}}$	1
	De p-waarde / overschrijdingskans berekenen: $\text{P}(\overline{Y} \leq 62{,}3) = normalcdf\left(-10^{99}, 62.3, 70.0, \frac{12{,}5}{\sqrt{30}}\right)$	1
	De p-waarde: 0,0004 (of nauwkeuriger)	1
	$0{,}0004 < 0{,}05$ (dus H_0 wordt verworpen en H_a is aangetoond)	1
	Er is (bij $\alpha = 0{,}05$) aangetoond dat de zieke koeien gemiddeld minder voer eten dan gezonde koeien.	1

Opgave 3: Differentiëren

<table>
<tr><td>a</td><td>Manier 1:</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$f(x) = 6 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} - x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 6x^{-\frac{1}{3}} - x^{1\frac{1}{2}}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>$f'(x)\left(= 6 \cdot -\frac{1}{3} \cdot x^{-1\frac{1}{3}} - 1\frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}\right) = -2x^{-1\frac{1}{3}} - 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>$f'(x) = -2 \cdot \frac{1}{x^{1\frac{1}{3}}} - 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{x\sqrt[3]{x}} - 1\frac{1}{2}\sqrt{x}$
(of een vergelijkbare uitdrukking zonder negatieve en gebroken exponenten)</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Manier 2:</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$f(x) = 6 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} - x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 6x^{-\frac{1}{3}} - x \cdot x^{\frac{1}{2}}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Met de productregel volgt:
$f'(x)\left(= 6 \cdot -\frac{1}{3} \cdot x^{-1\frac{1}{3}} - \left(1 \cdot x^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)\right) = -2x^{-1\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x \cdot x^{-\frac{1}{2}}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>$f'(x) = -2 \cdot \frac{1}{x^{1\frac{1}{3}}} - x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{x\sqrt[3]{x}} - 1\frac{1}{2}\sqrt{x}$
(of een vergelijkbare uitdrukking zonder negatieve en gebroken exponenten)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>b</td><td>$g'(x) = \frac{x \cdot 2 \cdot e^{2x-1} - e^{2x-1} \cdot 1}{x^2}\left(= \frac{2x \cdot e^{2x-1} - e^{2x-1}}{x^2}\right)$
Als de kandidaat de kettingregel vergeet of niet correct gebruikt, één punt in mindering brengen.</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>Inzicht dat de vergelijking $g'(x) = 0$ moet worden opgelost</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Beschrijven hoe de vergelijking $g'(x) = 0$ kan worden opgelost
• algebraïsch:
○ $\frac{2x \cdot e^{2x-1} - e^{2x-1}}{x^2} = 0$
○ $2x \cdot e^{2x-1} - e^{2x-1}$
○ $e^{2x-1} \cdot (2x-1) = 0$
○ $2x - 1 = 0$ ($e^{2x-1} = 0$ heeft geen oplossingen)
○ $x = \frac{1}{2}$

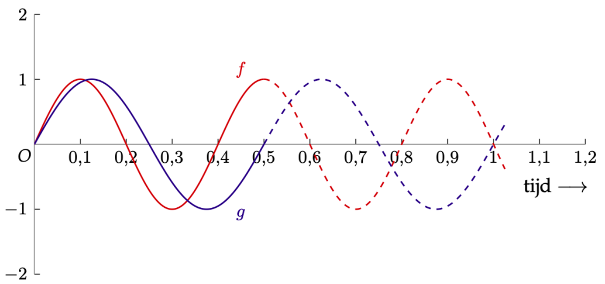
• grafisch-numeriek:
○ Voer in $Y_1 = \frac{2x \cdot e^{2x-1} - e^{2x-1}}{x^2}$ (of een vergelijkbare uitdrukking)
○ Optie zero geeft: $x = \frac{1}{2}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Uit een plot blijkt dat de grafiek van g een top heeft bij $x = \frac{1}{2}$

</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$g\left(\frac{1}{2}\right)\left(= \frac{e^{2 \cdot \frac{1}{2} - 1}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = 2$, dus de coördinaten van de top zijn $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$</td><td>1</td></tr>
</table>

Opgave 4: Champignons

a	X = diameter van een portobello (in cm) X is normaal verdeeld met $\mu = 11{,}2$ en $\sigma = 0{,}6$	
	$invNorm(0.90, 11.2, 0.6)$ $(= 11{,}96 \ldots)$ Als een kandidaat een grafische rekenmachine gebruikt waarmee hij met de kans 0,10 en optie 'right tail' de gevonden grenswaarde berekent, alle punten toekennen.	1
	Het antwoord: (minstens) 12,0 (cm)	1
b	Y = gewicht van een champignon (in grammen) Y is normaal verdeeld met $\mu = 13{,}0$ en $\sigma = 1{,}9$	
	S = totale gewicht van n champignons (in grammen)	
	Inzicht dat S normaal verdeeld is met $\mu = n \cdot 13{,}0$ en $\sigma = \sqrt{n} \cdot 1{,}9$	2
	Beschrijven hoe de ongelijkheid $\mathrm{P}(S < 250) < 0{,}05$ kan worden opgelost *Manier 1:* ○ Voer in $Y_1 = normalcdf\left(-10^{99}, 250, x \cdot 13.0, \sqrt{x} \cdot 1.9\right)$ ○ De tabel geeft: n | $\mathrm{P}(S < 250)$ 20 | 0,120 21 | 0,004 *Manier 2:* ○ Voer in $Y_1 = normalcdf(-10^{99}, 250, x \cdot 13.0, \sqrt{x} \cdot 1.9)$ en $Y_2 = 0{,}05$ ○ Optie intersect geeft $x = 20{,}3 \ldots$	1
	Dus (minimaal) 21 champignons	1
c	Op de verticale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt en de grafiek is een (dalende) rechte lijn (dus er is sprake van een exponentiele afname)	1
d	Het aflezen van twee punten, bijvoorbeeld $(2005, 300)$ en $(2015, 100)$ De twee punten dienen zodanig gekozen en nauwkeurig afgelezen te zijn, dat de halveringstijd tussen de 6,15 en 6,45 jaar ligt.	1
	De groeifactor per jaar is $g = \left(\frac{100}{300}\right)^{1/10} = 0{,}8959 \ldots$	1
	Beschrijven hoe de vergelijking $0{,}8959 \ldots^{t} = \frac{1}{2}$ kan worden opgelost • algebraïsch: ○ $0{,}8959 \ldots^{t} = \frac{1}{2}$ ○ $t = {}^{0{,}8959\ldots}\log\left(\frac{1}{2}\right)$ $(= 6{,}30 \ldots)$ • grafisch-numeriek: ○ Voer in $Y_1 = 0{,}8959 \ldots^{x}$ en $Y_2 = \frac{1}{2}$ ○ Optie intersect geeft $x = 6{,}30 \ldots$	1
	Het antwoord: 6 jaar en $(0{,}30 \ldots \cdot 12 \approx)$ 4 maanden (of 76 maanden)	1
e	*Manier 1:*	
	Het aantal kwekerijen is $\frac{50}{46} = 1{,}086 \ldots$ keer zo klein geworden, dus de gemiddelde oppervlakte wordt $1{,}086 \ldots$ keer zo groot	1
	De gemiddelde oppervlakte per kwekerij op 1 januari 2020 is $1{,}086 \ldots \cdot 5400 \approx 5900$ m^2 (of nauwkeuriger)	1

	Manier 2:	
	Inzicht dat het product van het aantal kwekerijen en de gemiddelde oppervlakte per kwekerij constant is	1
	De gemiddelde oppervlakte per kwekerij op 1 januari 2020 is $\frac{5400 \cdot 50}{46} \approx 5900$ m^2 (of nauwkeuriger)	1
	Manier 3:	
	Stel x is het aantal kwekerijen en y de gemiddelde oppervlakte in m^2. Dan geldt: $y = \frac{a}{x}$.	
	$x = 50$ en $y = 5400$ geeft $a(= 50 \cdot 5400) = 270\,000$, dus $y = \frac{270\,000}{x}$	1
	$x = 46$ geeft $y = \frac{270\,000}{46} \approx 5900$ m^2 (of nauwkeuriger)	1

Opgave 5: Geluid

a	$I = 10^{-5}$ geeft $S = 10 \cdot \log\left(\frac{10^{-5}}{10^{-12}}\right) = 70$ (dB)	1
b	$10 \cdot \log\left(\frac{2 \cdot I}{10^{-12}}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}} \cdot 2\right) = 10 \cdot \left(\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) + \log(2)\right)$	1
	Haakjes uitwerken geeft: $10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) + 10 \cdot \log(2)$	1
	$10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) + 10 \cdot \log(2) \approx 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) + 3{,}01$, dus $a \approx 3{,}01$	1
c	*Manier 1:*	
	$\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = \frac{1}{10} \cdot S$	1
	$\frac{I}{10^{-12}} = 10^{\frac{1}{10} \cdot S}$	1
	$I = 10^{\frac{1}{10} \cdot S} \cdot 10^{-12}$	1
	$I = 10^{\frac{1}{10} \cdot S - 12}$, dus $p = \frac{1}{10}$ en $q = 12$	1
	Manier 2:	
	$\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = \frac{1}{10} \cdot S$	1
	$\log(I) - \log(10^{-12}) = \frac{1}{10} \cdot S$	1
	$-\log(10^{-12}) = 12$, dus: $\log(I) = \frac{1}{10} \cdot S - 12$	1
	$I = 10^{\frac{1}{10} \cdot S - 12}$, dus $p = \frac{1}{10}$ en $q = 12$	1
d	*Manier 1:*	
	De grafieken tekenen op de uitwerkbijlage:  	1
	Dus na 1 (milliseconde)	1
	Manier 2:	
	De periode van f is 0,4 en de periode van g is 0,5 (milliseconden)	1
	De grafieken snijden elkaar voor het eerst weer op de horizontale as na het kleinste aantal milliseconden waarin een geheel aantal keer 0,2 en 0,25 passen, dus na 1 (milliseconde)	1
e	De amplitude van h is $(2 \cdot 1 =)\ 2$ dus $b = 2$	1
	De periode van h is $\left(\frac{0{,}4}{2} =\right) 0{,}2$	1
	$c = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{0{,}2} = 10\pi\ (\approx 31{,}4)$	1
	h bereikt een kwart van de periode na een startpunt een maximum, dus $t_{\text{start}} = 0 - \frac{1}{4} \cdot 0{,}2 = -0{,}05$, dus $d = -0{,}05$ ($\pm$ een veelvoud van 0,2)	1

Opgave 6: Autoproductie

a	$t(1) = 1000$ en $t(2)$ $(= 1000 \cdot 2^{-0,8}) = 574{,}34\ldots$	1
	$\left(\frac{574{,}34\ldots-1000}{1000} \cdot 100\% \approx -42{,}6\%, \text{dus}\right)$ Het aantal arbeidsuren neemt met $42{,}6\%$ af	1
b	$t'(n) = 1000 \cdot -0{,}8 \cdot n^{-1,8}$ $(= -800 \cdot n^{-1,8})$	1
	$n^{-1,8}$ is positief, dus $t'(n) = -800 \cdot n^{-1,8}$ is negatief voor elke mogelijke waarde van n	1
	Omdat de afgeleide negatief is, neemt het aantal arbeidsuren (t) af bij iedere volgende serie (n)	1
c	$1000 \cdot n^{-0.8} = t$ geeft $n^{-0,8} = \frac{1}{1000} \cdot t$	1
	$n = \left(\frac{1}{1000} \cdot t\right)^{\frac{1}{-0.8}}$	1
	$n = \left(\frac{1}{1000}\right)^{\frac{1}{-0,8}} \cdot t^{\frac{1}{-0,8}} \approx 5623 \cdot t^{-1,25}$ (of nauwkeuriger)	1